○水理学演習：開水路の定常流・長方形断面水路での運動量式（７）の導出

方法①

$$(6)：M_0 \equiv \beta \frac{Q^2}{gA} + h_G A \cos\theta$$

ここで，長方形断面水路では，

$$h_G = \frac{h}{2}, A = Bh$$

式（６）の両辺を x で微分する．（計算簡略のため，$\beta = 1$）

$$\frac{dM_0}{dx} = -\frac{Q^2}{gA^2}\frac{dA}{dx} + \frac{h^2\cos\theta}{2}\frac{dB}{dx} + A\cos\theta\frac{dh}{dx}$$

$\frac{dA}{dx} = \frac{\partial A}{\partial x}\Big|_{h=const} + \frac{\partial A}{\partial h}\Big|_{x=const}\frac{dh}{dx} = h\frac{dB}{dx} + B\frac{dh}{dx}$より，

$$\frac{dM_0}{dx} - \frac{h^2\cos\theta}{2}\frac{dB}{dx} = -\frac{Q^2}{gA^2}\left(B\frac{dh}{dx} + h\frac{dB}{dx}\right) + A\cos\theta\frac{dh}{dx}$$

$$= A\left\{\cos\theta\frac{dh}{dx} - \frac{Q^2}{gA^3}\left(B\frac{dh}{dx} + h\frac{dB}{dx}\right)\right\}$$

$$= A\left\{\frac{dh}{dx}\left(\cos\theta - \frac{v^2}{gh}\right) - \frac{v^2}{gB}\frac{dB}{dx}\right\}$$

水面形方程式（８）より，

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i_0 - i_f + \frac{Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial x}}{\cos\theta - \frac{Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial h}}$$

$$= \frac{i_0 - i_f + \frac{v^2}{gBh}h\frac{dB}{dx}}{\cos\theta - \frac{v^2}{gBh}B}$$

$$= \frac{i_0 - i_f + \frac{v^2}{gB}\frac{dB}{dx}}{\cos\theta - \frac{v^2}{gh}}$$

$$\therefore \frac{dh}{dx}\left(\cos\theta - \frac{v^2}{gh}\right) - \frac{v^2}{gB}\frac{dB}{dx} = i_0 - i_f = \sin\theta - \frac{\tau_b}{\rho g R}$$

元の式に代入して，

$$\frac{dM_0}{dx} - \frac{h^2\cos\theta}{2}\frac{dB}{dx} = A\left\{\sin\theta - \frac{\tau_b}{\rho g R}\right\} \; //$$

方法②（物理的理解）

微小区間dxでの単位時間当たり運動量変化について立式す

$$d\left(\rho Q v + \frac{1}{2}\rho g h^2 B\cos\theta\right) = \rho g A \sin\theta\, dx - \tau_b s\, dx + \frac{1}{2}\rho g h^2 dB\cos\theta$$

ここで，左辺は運動量＋圧力による力積の変化量，右辺第一項は重力による力積，右辺第二項は壁面せん断力による力積，右辺第三項は側壁からの反作用力による力積（水路幅変化量dBに依存）

両辺$\rho g dx$で除して，極限を取る

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{Qv}{g}+\frac{1}{2}h^2 B\cos\theta\right)=A\sin\theta-\frac{\tau_b s}{\rho g}+\frac{1}{2}h^2\cos\theta\frac{dB}{dx}$$

$A=Bh, Q=vA, R=A/s$より，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{gA}+\frac{hA}{2}\cos\theta\right)=A\left(\sin\theta-\frac{\tau_b}{\rho g\frac{A}{s}}\right)+\frac{h^2\cos\theta}{2}\frac{dB}{dx}$$

$$\frac{dM_0}{dx}-\frac{h^2\cos\theta}{2}\frac{dB}{dx}=A\left(\sin\theta-\frac{\tau_b}{\rho g R}\right)\ //$$